УДК 539.3:624.012

ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Й. Лучко, д.т.н., Є. Іваник, к.ф.-м.н., В. Семерак, к.т.н.
Львівський національний аграрний університет

Ключові слова: просторова задача термопружності, анізотропія, багатошарова циліндрична оболонка, температура, переміщення, чисельний алгоритм, граничні інтегральні рівняння.

Розглянуто просторову задачу термопружності для багатошарової нерівномірно нагрітої циліндричної оболонки. Закон зміни температури багатошарової анізотропної системи вважається заданим у вигляді довільної гладкої функції координат. Матеріал шарів оболонки приймається пружним і анізотропним з довільним напрямом головних осей. Отримано граничні інтегральні рівняння для розв'язку першої і другої крайових задач теплопровідності та визначення компонент вектора пружних переміщень відповідних граничних задач термопружності.

Постановка проблеми. Одне з найважливіших завдань сучасної науки – розвиток фундаментальних і прикладних досліджень, найскоріше впровадження їх результатів у практичну діяльність. Прискорення науково-технічного прогресу – вирішальний засіб підвищення ефективності виробництва.

Інтенсивний розвиток галузей сучасної наукомісткої техніки – ракетобудування, атомна енергетика, пряме перетворення тепла в інші види енергії, а також впровадження нових методик у машинобудування, будівництво – вимагає застосування нових конструкцій на основі композитів з певним комплексом властивостей та експлуатаційних характеристик.

Подальший розвиток відповідних досліджень йде шляхом удосконалення та впровадження нових методів теплофізичних і термопружних вимірювань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останніми роками значну увагу дослідники приділяють розширенню температурного діапазону працездатності конструкцій машинобудування або будівництва, виконаних з композитів типу залізобетон, а також підвищенню їх міцності в умовах екстремальних температурних режимів експлуатації [1; 2]. Для композиційних матеріалів кількість чинників, що впливають на поведінку відповідних конструктивних елементів, ще більше зростає порівняно з металами, сплавами і хімічними сполуками. У цьому разі особливо можуть проявитись технологічні чинники: умови пресування, спікання, просочування, наступної термообробки.

Для вивчення поведінки конструкцій з композитів переважно слід задовольнятися накопиченням експериментальних даних і пошуком різноманітних емпіричних закономірностей. Як зазначено авторами роботи [3], загальна кількість теоретичних робіт і робіт, що містять експериментальні дані з їх теоретичним тлумаченням, досить мала, про що свідчить наведена ними статистика.

Постановка завдання. Виходитимемо зі системи диференціальних рівнянь квазістатичної незв'язаної задачі термопружності [2; 4]:

$$c_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} + \beta_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} = X_i, \tag{1}$$

$$K_{ij}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} + G \quad (i,j,k,l = 1,2,3), \tag{2}$$

де c_{ijkl} – коефіцієнти пружності анізотропного тіла; β_{ij} – коефіцієнти зв'язності механічного і теплового поля; a^2 – коефіцієнт об'ємної теплоємності; K_{ij} – коефіцієнти теплопровідності; X_i – компоненти вектора масових сил; G – густина внутрішніх джерел тепла; $T(x_1, x_2, x_3, t)$ – температурне поле; $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ – компоненти вектора пружних переміщень; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – біжуча точка простору; t – час.

Систему рівнянь (1), (2) розглядаємо в деякій області $D \subset \Re^3$ простору; вважаємо, що

$S = \partial D$ – межа області є кусково-гладкою.

До диференціальних рівнянь (1), (2) слід долучити крайові умови:

- початкову умову

$$T(x,t)\big|_{t=t_0} = \psi(x),\ x \in D; \tag{3}$$

- граничні умови

- перша крайова задача

$$T(x,t)\big|_S = \Phi(x,t),\ x \in S, \tag{4}$$

$$u(x,t)\big|_S = H(x,t),\ x \in S; \tag{5}$$

- друга крайова задача

$$\vec{K}\operatorname{grad}T(x,t)\big|_S = \Phi(x,t),\ x \in S, \tag{6}$$

$$p(x,t)\big|_S = H(x,t),\ x \in S. \tag{7}$$

У формулах (6), (7) через $p(x,t)$ позначено поверхневу силу, а $\vec{K} = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} K_{ij}\cos(n,x_i)\right)\vec{x}_j^{\,0}$; $\vec{x}_1^{\,0}, \vec{x}_2^{\,0}, \vec{x}_3^{\,0}$ — орти просторової системи координат.

Виклад основного матеріалу. Оскільки ми розглядаємо незв'язану задачу термопружності, то, припускаючи, що функції $T,u \in C^2(D)\cap C(D)$, а $\Phi,\psi \subset C^1(D)$, та використовуючи фундаментальні розв'язки однорідного рівняння теплопровідності [5; 6] $(G = 0)$, запишемо відповідні інтегральні рівняння першої і другої крайових задач, які матимуть вигляд:

– перша крайова задача (визначається рівняннями і співвідношеннями (2), (3), (4))

$$T(x,t) = a^2\int_{t_0}^{t}\iint_S \mu(y,t')\vec{K}\operatorname{grad}\delta(x,y,t,t')\,dS\,dt' + \iiint_D \delta(x,y,t,t_0)\psi(y)\,dD +$$

$$+\ a^2\int_{t_0}^{t}\iiint_D \delta(x,y,t,t')G(y,t')\,dD\,dt',\ x \in D\setminus S, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\mu(x,t) + a^2\int_{t_0}^{t}\iint_S \mu(y,t')\vec{K}\operatorname{grad}\delta(x,y,t,t')\,dS\,dt' + \iiint_D \delta(x,y,t,t_0)\psi(y)\,dD +$$

$$+\ a^2\int_{t_0}^{t}\iiint_D \delta(x,y,t,t')G(y,t')\,dD\,dt' - \Phi(x,t),\ x \in S; \tag{9}$$

– друга крайова задача (визначається рівняннями і співвідношеннями (2), (3), (6))

$$T(x,t) = a^2\int_{t_0}^{t}\iint_S \sigma(y,t')\delta(x,y,t,t')\,dS\,dt' + \iiint_D \delta(x,y,t,t_0)\psi(y)\,dD +$$

$$+\ a^2\int_{t_0}^{t}\iiint_D \delta(x,y,t,t')G(y,t')\,dD\,dt',\ x \in D\setminus S, \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma(x,t) + a^2\int_{t_0}^{t}\iint_S \mu(y,t')\vec{K}\operatorname{grad}\delta(x,y,t,t')\,dS\,dt' + \iiint_D \vec{K}\operatorname{grad}\delta(x,y,t,t')\psi(y)\,dD +$$

$$+\ a^2\int_{t_0}^{t}\iiint_D \vec{K}\operatorname{grad}\delta(x,y,t,t')G(y,t')\,dD\,dt' - \Phi(x,t),\ x \in S. \tag{11}$$

У рівняннях (8)-(11) позначено:

$\delta(x,y,t,t') = \dfrac{1}{\left[2a\sqrt{\pi(t-t')}\right]^3\sqrt{\det\vec{k}}}\,e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t')}}$ – фундаментальний розв'язок однорідного рівняння теплопровідності (2); $r = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} R_{ij}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}$; R_{ij} – елементи матриці, оберненої до матриці $\{K_{ij}\}(i, j = 1,2,3)$; $\mu(x,t)$, $\sigma(x,t)$ – невідомі густини, які визначаються з розв'язку інтегральних рівнянь (9), (11) відповідно.

Використовуючи властивості термопружних потенціалів квазістатичної задачі термопружності [7; 8], отримуємо граничні інтегральні рівняння для визначення компонент вектора пружних переміщень для крайових задач (1)-(5) і (1)-(3), (6), (7). Зокрема для задачі, що визначається рівняннями і залежностями (1)-(5), матимемо:

$$\frac{1}{2}u_i(x,t) + \int_{t_0}^{t}\iint_S T_{ij}(x,y,t,t')u_i(y,t')dSdt' = \int_{t_0}^{t}\iint_S u_{ij}(x,y,t,t')H_i(y,t')dSdt' +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\iiint_D u_{ij}(x,y,t,t')X_i(y,t')dDdt',\ (i, j = 1,2,3),\ x \in S; \qquad (12)$$

$$\int_{t_0}^{t}\iint_S R_{n(x)}T_{ij}(x,y,t,t')u_i(y,t')dSdt' = \frac{1}{2}H_i(x,t) + \int_{t_0}^{t}\iint_S R_{n(x)}u_{ij}(x,y,t,t')H_i(y,t')dSdt' +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\iiint_D R_{n(x)}u_{ij}(x,y,t,t')X_i(y,t')dDdt',\ (i, j = 1,2,3),\ x \in S. \qquad (12)$$

У граничних інтегральних рівняннях (12), (13) позначено: $T_{ij}(x,y,t)$ – елементи матриці сингулярних розв'язків рівняння теплопровідності; $u_{ij}(x,y,t)$ – елементи матриці фундаментальних розв'язків рівнянь теорії пружності; $R_{n(x)}$ – матричний оператор, який пов'язує функції $H(x,t)$ з $\Phi(x,t)$.

Граничні інтегральні рівняння для знаходження переміщень у випадку другої крайової задачі (1)-(3), (6), (7) подано в роботі [9].

Чисельний аналіз. Побудований розв'язок апробовано при розрахунку модельної задачі – сталебетонна оболонка-балка: сталь-епоксидна зв'язка-чавун, що моделює акумулятор тепла на об'єктах АЕС.

Геометричні параметри системи: зовнішній діаметр $D = 20$ м, діаметри складових системи: $d_1 = 4$ м, $d_2 = 6$ м, $d_3 = 18$, висота $h = 45$ м (значення теплофізичних і фізико-механічних характеристик взято з роботи [10]). Розроблений алгоритм на базі рівнянь і залежностей (1)-(13) реалізовано у вигляді пакета програм на мові FORTRAN для PC IBM і сумісних з ними.

Рис. 1 і рис. 2 показують результати числового розрахунку розподілу температури і компонент тензора температурних напружень. З наведених графіків видно, що за товщиною захисних покрить (внутрішнього і зовнішнього) температура змінюється незначно, тоді як в основному матеріалі вона зазнає суттєвих змін. Кільцеві напруження $\sigma_{\varphi\varphi}$ досягають найбільших значень на межі зовнішнього покриття і внутрішньої зв'язки.

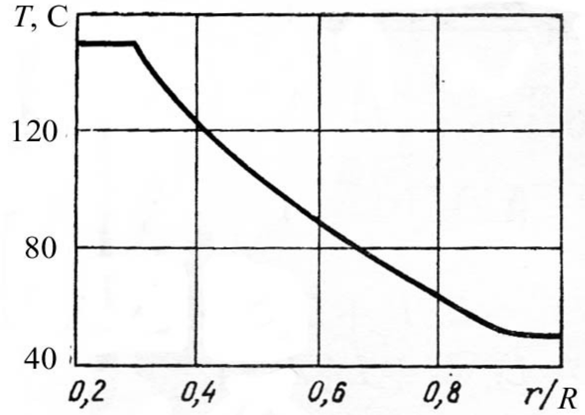

Рис. 1. Розподіл температури в багатошаровій оболонці за товщиною.

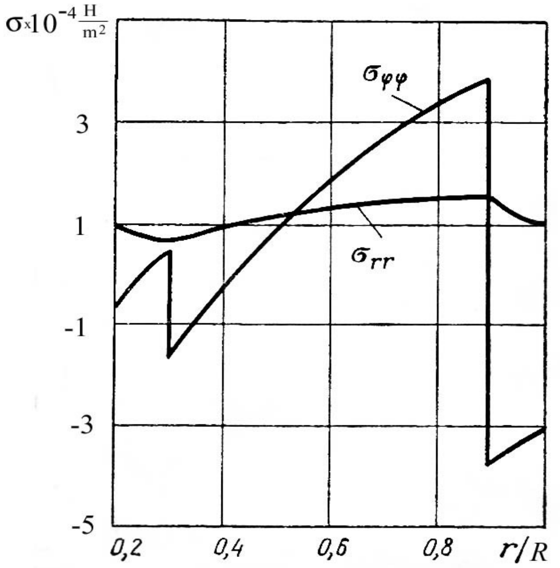

Рис. 2. Розподіл компонент тензора температурних напружень у багатошаровій оболонці вздовж радіальної координати.

Подальші кроки реалізації чисельного алгоритму (дискретизація поверхні S, вибір скінченних елементів, формування матриці жорсткості тощо) стандартні для задач, які розв'язуються методом граничних інтегральних рівнянь і детально обговорюються у фундаментальній праці [7]. При цьому обумовлюється, що вектор силових поверхневих навантажень і відповідні зовнішні та внутрішні температурні чинники, тобто крайові умови, такі, що гарантують існування і єдність розв'язку розглядуваної задачі термопружності [2]. Розрахунок модельної конструкції зводиться до визначення невідомих функцій $\mu(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $T(x,t)$, $u_i(x,t)$, що задовольняють сформовані граничні інтегральні рівняння, а на поверхнях з'єднання різнорідних конструктивних елементів – відповідні умови термомеханічного спряження (рівність температури і теплових потоків, а також нормальних компонент вектора переміщень і тензора напружень).

Отже, поверхня бака апроксимується набором плоских трикутних елементів, а саме – обчислення здійснювались на сітці з $n = 2025$ елементів. По суті, така схема дискретизації аналогічна представленню оболонки у вигляді сукупності плоских елементів. Визначені на граничних поверхнях функції, які фігурують у виведених інтегральних рівняннях (8)-(12), покладались лінійними в межах кожного скінченного елемента. Кількість вузлових точок варіювалась залежно від віддалі між вершинами трикутних елементів. Сингулярні інтеграли, в яких підінтегральні вирази в околі точок сингулярності мають достатньо гладкий характер, обчислюються чисельно з використанням відомих квадратурних формул [11]; у протилежному випадку використовується методика [7], яка полягає у виділенні з підінтегральної функції сингулярної складової, що може бути проінтегрованою аналітично. Досягнення більшої точності можливе, природно, за рахунок використання квадратичної або кубічної зміни шуканих функцій у межах кожного скінченного елемента.

Висновки. Запропонована методика розрахунку термопружного стану конструкції акумулятора тепла реалізована в комплексі програм, до складу якого входять програми:

- програма, відповідальна за введення і редагування, з одночасним роздруком вхідної інформації;
- програма, що здійснює розрахунок конструкції оболонка-балка шляхом розв'язування системи граничних інтегральних рівнянь за допомогою методу розчленування конструкції на елементи;
- програма, що видає результати роботи комплексу в зручному для користувача вигляді.

Також до складу комплексу входить бібліотека стандартних підпрограм загального призначення, зокрема: обчислення відповідних спеціальних функцій, чисельне інтегрування і диференціювання, розв'язок систем алгебраїчних рівнянь.

Порівняння дослідних і теоретичних даних, отриманих на основі числових розрахунків згідно з розробленим алгоритмом, дає добрий збіг. Отже, запропонована методика розв'язку просторової задачі термопружності достатньо ефективна і надійна, про що свідчать результати відповідних числових досліджень, які ілюструють можливості побудованого алгоритму.

Бібліографічний список

1. Коваленко А. Д. Избранные труды / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1976. – 762 с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
3. Самсонов Г. В. Теплофизические свойства твердых веществ / Г. В. Самсонов, О. А. Геращенко // Теплофизические свойства твердых веществ. – М. : Наука, 1976. – С. 7 – 13.
4. Иваник Е. Г. Уравнения связанной термоупругости анизотропных термочувствительных тел / Е. Г. Иваник, И. И. Бернар // Механика конструкций, работающих при воздействии агрессивных сред. – Саратов : Изд-во Саратов. политехн. ин-та, 1987. – С. 58-60.
5. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 487 с.
6. Chang Y. P. The use of fundamental Green's functions for the solution of problem of heat conduction in anisotropic media / Y. P. Chang, C. S. Kang, D. J. Chen // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1973. – V.16, N 10. – P. 1905-1918.
7. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984. – 494 с.
8. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. – М. : Мир, 1978. – 210 с. – (Сер. "Механика. Новое в зарубежной технике").
9. Мамедов Ю. М. Применение метода потенциала в задачах термоупругости: препринт / Ю. М. Мамедов. – Баку, 1987. – 78 с.
10. Таблицы физических величин : справочник / под ред. М. К. Кикоина. – М. : Атомиздат, 1976. – 1008 с.
11. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973. – 631 с.

Лучко И., Иваник Е., Семерак В. Численный алгоритм решения пространственной задачи термопрупругости для многослойной цилиндрической оболочки

Рассматривается пространственная задача термоупругости для многослойной неравномерно нагретой цилиндрической оболочки. Закон изменения температуры многослойной анизотропной системы полагается заданным в виде произвольной гладкой функции координат. Материал слоев оболочки принимается упругим и анизотропным с произвольным направленим главных осей. Получены интегральные уравнения для решения первой и второй краевых задач теплопроводности и определения компонент вектора упругих смещений соответствующих граничных задач термоупругости.

Ключевые слова: пространственная задача термоупругости, анизотропия, многослойная цилиндрическая оболочка, температура, перемещения, численный алгоритм, граничные интегральные уравнения.

Lutchko Yo., Ivanyk E., Semerak V. Numerical algorythm solution of the volume thermoelasticity problem for multilayered cylindrical shell

The spatial problem of the thermoelasticity for multilayered nonuniform heating cylindrical shell is considered. The low change of the temperature of multilayered anisotropic system admit made on the view arbitrary smooth function from coordinates. The boundary integral equation for solution of the first and second boundary value heat conductivity problem and determination of the components vector the elasticity displacement certain boundary problem of the thermoelasticity is obtain.

Key words: spatial value problem of thermoelasticity, anisotropy, multilayered cylindrical shell, temperature, displacement, numerical algorithm, boundary integral equations.